

§ 2. Некоторые теоремные схемы

Приведем ряд теоремных схем, которые потребуются в дальнейшем (доказательство дано Г. А. Смирновым в [12]). В качестве сокращения для $x \vdash y$ и $y \vdash x$ будем употреблять символ $x \dashv \vdash y$.

- T1. $xy \vdash y$ [A4, A3, R1]
 T2. $x \vdash x$ [A1, A2, R1]
 T3. $x \vdash xx$ [T2, R2]
 T4. $xx \vdash x$ [A3]
 T5. $yx \vdash xy$ [A4]

T6. $x : y \vdash y : x$

1. $\sim(x : y) \vdash yx : \sim y \sim x$ [A9, A4, T5, R3]

2. $\sim(x : y) \vdash \sim(y : x)$ [1, A10, R1]

3. $\sim(y : x) \vdash \sim(x : y)$ [2]

4. $\sim\sim(x : y) \vdash \sim\sim(y : x)$ [2, 3, R3]

5. $x : y \vdash y : x$ [A1, 4, R1]

T7. $y : x \vdash x : y$ [T6].

T8. Доказательство правила коммутации для случая $x^1: \dots : x^n$ ($n \geq 2$) опирается на A5, A6, A9—A12, T6, T7.

Ниже ссылки на A1, A5, A6, T2—T8 в большинстве случаев опускаются как очевидные.

T9. $(x : y) z \vdash xz : yz$

1. $(x : y) z \vdash (y : xz) z$ [A14, T1, R2]

2. $(x : y) z \vdash xz : yz$ [1, A14, R1]

T10. Для случая $x^1: \dots : x^n$ ($n \geq 2$) доказательство аналогично доказательству T9.

T11. $x \vdash x : x \sim x : x \sim x$ [T3, T4, A1, A7, R1, R3]

T12. $x : x \sim x : x \sim x \vdash x$ [A13, T1, R1]

T13. $x \vdash x : x \sim x$

1. $\sim x \vdash \sim(x : x \sim x : x \sim x)$ [T11, T12, R3]

2. $x : x \sim x : x \sim x \dashv\vdash x : (x \sim x : x \sim x)$
 [A11, A12]

3. $\sim x \vdash \sim(x : (x \sim x : x \sim x))$ [1, 2, R3, R1]

4. $\sim x \vdash x(x \sim x : x \sim x) : \sim x \sim (x \sim x : x \sim x)$
 [3, A9, R1]

$$5. x \sim x : x \sim x \dashv\vdash \sim (x : \sim x) \quad [A10]$$

$$6. \sim x \vdash x(x \sim x : x \sim x) : \sim x(x : \sim x) \quad [4, 5, R3, R1]$$

$$7. \sim x \vdash \sim x : x \sim x : x \sim x : x \sim x \quad [6, A13, T10, A12, R3, R1]$$

$$8. x \vdash (x : x \sim x : x \sim x) : x \sim x \quad [7, A11, R1]$$

$$9. x \vdash x : x \sim x \quad [8, T11, T12, R3, R1]$$

$$T14. x : x \sim x \vdash x \quad [A13, T1, R1]$$

$$T15. x : y \vdash x \sim y : \sim xy$$

$$1. x : y \vdash \sim (xy : \sim x \sim y) \quad [A1, A9, R3, R1]$$

$$2. x : y \vdash x \sim xy \sim y : \sim (xy) \sim (\sim x \sim y) \quad [1, A9, R1]$$

$$3. (x : y) \vdash x \sim y : \sim xy \quad [2, A7, A13, T10, A11, A12, T13, T14, R3, R1]$$

$$T16. x \sim y : \sim xy \vdash x : y$$

$$1. x \sim y : \sim xy \vdash \sim (x \sim xy \sim y : \sim (x \sim y) \sim (xy)) \quad [A1, A9, R1, R3]$$

$$2. x \sim y : \sim xy \vdash \sim (xy : \sim x \sim y) \quad [1, A11, A12, T10, A8, A7, T13, T14, R3, R1]$$

$$3. x \sim y : \sim xy \vdash x : y \quad [2, A10, A1, R3, R1].$$

T17. Для случая $x^1 : x^2 : \dots : x^n$ ($n \geq 2$) доказательство аналогично T15 и T16.

$$T18. x \vdash x(x : \sim x) \quad [T13, A13, R1]$$

$$T19. x(x : \sim x) \vdash x \quad [A3]$$

$$T20. xz : y \vdash (xz : y)(x : \sim x)$$

$$1. xz : y \vdash xz \sim y : \sim (xz)y \quad [T17]$$

$$2. xz : y \vdash xz \sim y : \sim xzy : x \sim zy : \sim x \sim zy \quad [1, A8, A13, T10, R3, A12, A3]$$

$$3. xz : y \vdash (xz \sim y : \sim xzy : x \sim zy : \sim x \sim zy)(x : \sim x) \quad [2, T18, T19, R3, A13, A3].$$

4. $xz : y \vdash x : \sim x$ [3, T2, R2]

5. $xz : y \vdash (xz : y)(x : \sim x)$ [4, T2, R2]

T21. $(xz : y)(x : \sim x) \vdash xz : y$ [A3]

T22. $(x : y)x \vdash \sim y$

1. $(x : y)x \vdash x : xy$ [T10]

2. $(x : y)x \vdash (x : xy)(y : \sim y)$ [1, T20, R1]

3. $(x : y)x \vdash \sim y : y : y$ [2, A14, A13, A3, R1]

4. $(x : y)x \vdash \sim y$ [3, T17, A13, T1, R1]

T23. $(x : y)\sim x \vdash y$

1. $(x : y)\sim x \vdash x \sim y : \sim xy$ [A3, T17, R1]

2. $(x : y)\sim x \vdash \sim x : \sim y$ [1, T17, R1]

3. $(x : y)\sim x \vdash (\sim x : \sim y)\sim x$ [2, T1, R2]

4. $(x : y)\sim x \vdash y$ [3, T22, R1].